Universidad de Talca
Campus Curicó

NOTA	

Prueba N° 2

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA):

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Módulo:	Carrera:	Sección:

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Los útiles (lápiz, goma, etc.) son de uso personal.
- Recuerde que debe realizar su prueba en su respectiva sección, de lo contrario será calificado con nota mínima.
- Queda prohibido el uso de calculadoras y formulario.
- Apagar y guardar sus **celulares**.

Nota $= 1+\frac{Puntos}{10}$.

Duración = 60 minutos

CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

UTALCA

IMAFI

1) **(20 puntos)** Considerar los siguientes planos en el espacio $\mathbb{R}^3$
$\pi_1 : 3x + y - z = 8$ y $\pi_2 : -x + 2z = -2$

a) Determinar la ecuación paramétrica de la recta L correspondiente a la intersección de los planos π_1 y π_2

b) Determinar el plano π_3 que contiene a la recta L y al punto $P = (2, 0, 5)$

Desarrollo:

a) Para determinar la intersección debemos resolver el sistema:
$3x + y - z = 8$
$-x + 2z = -2$

De la segunda ecuación tenemos que $x = 2z + 2$ y reemplazando en la primera tenemos que $y = 2 - 5z$, tomando $z = t$ se tiene que la ecuación pedida viene dada por:

$$L = \begin{cases} x = 2 + 2z \\ y = 2 - 5t, t\epsilon\mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \tag{1}$$

b) Para determinar el vector normal al plano buscado usamos el vector director de la recta L, $v_1 = (2, -5, 1)$ y el vector obtenido con los puntos $(2, 2, 0)$ y $(2, 0, 5)$ que es $v_2 = (0, 2, -5)$
Calculamos el vector $v_1 \times v_2 = (23, 10, 4)$
Luego, el plano pedido $\pi_3 : 23(x - 2) + 10(y - 2) + 4(z - 0) = 0$
$\Rightarrow \pi_3 : 23x + 10y + 4z = 36$

2) **(20 puntos)** Considerar los siguientes subespacios de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
$U = \{ax^2 + bx + c \ / \ b = 2c\}$ y $W = \{ax^2 + bx + c \ / \ b = 0\}$

a) Determinar una base $\mathcal{B}$ para U y una $\mathcal{B}'$ para W
b) Determinar una base y dimensión para $U \cap W$
c) Extender la base $\mathcal{B}$ para obtener una base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
d) Determinar si: $U + W = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y si $U \oplus W = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Desarrollo:

a) Los elementos de U son de la forma $ax^2 + 2cx + c = ax^2 + c(2x + 1)$, luego $\mathcal{B} = \{x^2, 2x+1\}$ es un generador de U, como es l.i., se tiene que es una base. Los elementos de W son de la forma $ax^2 + c$, luego $\mathcal{B}' = \{x^2, 1\}$ es un generador de W, como es l.i., se tiene que es una base.

b) $U \cap W = \{ax^2 + bx + c \ / \ b = 2c \wedge b = 0\} = \{ax^2 + bx + c \ / \ b = c = 0\}$, luego, los elementos de $U \cap W$ son de la forma ax^2, así, $A = \{x^2\}$ es una base de $U \cap W$ y la $Dim U \cap W = 1$

c) Por dimensión, para obetener lo pedido basta agregar cualquier vector l.i. al conjunto $\mathcal{B}$, por ejemplo el polinomio 1.
Corroboramos que $\mathcal{C} = \{x^2, 2x + 1, 1\}$ es l.i.
$\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot (2x + 1) + \gamma \cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$
Luego $\mathcal{C}$ cumple lo pedido.

d) Se sabe que:
Dim($U + W$)=Dim(U)+Dim(W)$-$Dim($U \cap W$)$= 2 + 2 - 1 = 3$
Luego, $U + W = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
Como $U \cap W \neq \{0\}$ se tiene que no es suma directa.

3) **(20 puntos)** Considerar las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$
$B_1 = \{(1,-1,2),(4,2,0),(1,-3,3)\}$ y $B_2 = \{(0,2,-1),(1,1,1),(1,-2,0)\}$

a) Determinar $[P]_{B_1}^{B_2}$ (matríz de cambio de base de B_1 a B_2)

b) Considerar el vector $v = (0,0,15)$, determinar $[v]_{B_1}$

c) Usando $[P]_{B_1}^{B_2}$ y $[v]_{B_1}$ determinar $[v]_{B_2}$

Desarrollo:

a) $(1,-1,2) = \alpha(0,2,-1) + \beta(1,1,1) + \gamma(1,-2,0)$

resolviendo se tiene que $[(1,0,2)]_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(4,2,0) = \alpha(0,2,-1) + \beta(1,1,1) + \gamma(1,-2,0)$

resolviendo se tiene que $[(4,1,0)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(1,-3,3) = \alpha(0,2,-1) + \beta(1,1,1) + \gamma(1,-2,0)$

resolviendo se tiene que $[(4,1,0)]_{B_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Luego, $[P]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $(0,0,15) = \alpha(1,-1,2) + \beta(4,2,0) + \gamma(1,-3,3)$

resolviendo se tiene que $[(0,0,15)]_{B_1} = \begin{pmatrix} 21 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$

c) $[v]_{B_2} = [P]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_1} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$